Peili-modulaarinen runko, slot-saturaatio ja kovariantti CRT-sulkeuma saattavat ratkaista $3x+1$ -pulman

Eŝa Sakkinen.

[a] *University of Oulu, Finland*

Abstract

Kehitämme elementaarisen lohko-affiinin laskennan kiihdytetylle parittomalle Collatz-kuvaukselle. Yhden lohkon identiteetistä $C_{i+1} = \frac{3^{n_i}}{2^{n_i+m_i}} C_i + \frac{2^{m_i}-1}{2^{m_i}}$ saamme k askeleen koosteen sekä standardin kierroskaavan nimittäjällä $2^{M+N} - 3^N$. Samankertaisesti täsmällinen yhden lohkon erotuskaava antaa kovariantin "erotuskerroksen" summasäännön $\sum_i \kappa_i \Delta_i = 0$ eksplisiittisillä positiivisilla painoilla κ_i. Reduktio minkä tahansa parittoman alkuluvun $q \neq 3$ mukaan antaa yhden lineaarisen ehdon ("lokeroinnin") $\langle \overline{\boldsymbol{\kappa}}, \overline{\boldsymbol{D}} \rangle \equiv 0 \pmod q$ lohkojen välisille erotuskeskuksille. Todistamme, että äärellinen taakse-haarautuminen peittää jokaisen paikan surjektiivisesti (ja - kun paikalliset päivitykset ovat käännettävissä modulo q - myös kaikkien q:n potenssien yli) ja on q-adisesti vakaa. Täydentävä offsetkerros, joka saadaan kuljettamalla pariton tekijä H_i kierroksen ympäri, osoittaa, että jokaiselle alkuluvulle, joka jakaa $2^{M+N} - 3^N$, vähintään yksi paikallinen riviyhtälö $H_{i+1} \equiv \alpha_i H_i + \beta_i \pmod{q^k}$ tuottaa eitriviaalin paikallisen lineaarisen ehdon. Jäykkyyslemma eliminoi "rotaatioon tarttuvat" alkuluvut: jos paikan normalisointi $\sigma(\overline{\boldsymbol{\kappa}}) \equiv 0 \pmod q$ toteutuu ja $(3 \cdot 2^{-1})^{n_i} \equiv 1 \pmod q$ kaikilla i, syntyisi $(2,3)$-puhdas kierros-tekijä, mikä on mahdotonta ellei $2^{M+N} - 3^N = 1$. Näin ollen kierroksen omassa indeksoinnissä voidaan valita ei-tarttuva offset-alkuluku $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$ sekä siitä riippumaton erotus-alkuluku $q' \neq 3$; niiden rotaatioltaan erilliset rivit muodostavat ylämääräisen kiinalaisen jäännöslauseen järjestelmän ilman ei-triviaalia ratkaisua. Kvantitatiivinen "lyö tai kutista" -tyyppinen Lyapunovraja osoittaa tämän jälkeen, että jokainen rajoittunut kulkurata päättyy, ja siksi jokainen Collatz-jono saavuttaa luvun 1. Lähestymistapa on puhtaasti algebrallinen ja nojaa vain paikallisiin identiteetteihin, lineaarialgebraan päätyrenkaiden yli sekä kahden kerroksen välisiin kiinalaisen jäännöslogiikan kytkentöihin.

*Corresponding author: Eusa

Keywords: Collatzin konjektuuri, kiihdytetty parillinen-pariton lohko, q-adikit, affiini lohkolaki, erotuskerroksen summa, CRT, syklien poissulkeminen

1. Termistö ja näkökulma

Tässä osassa esitellään neljä keskeistä käsitettä (runko, paikka, paikkasaturaatio, rotaatioinvarianssi) kahdella kielellä: toisaalta täsmällisessä algebrallisessa viitekehyksessä ja toisaalta diskreetin dynamiikan ja matemaattisen fysiikan tarjoaman geometrisen intuition avulla. Tavoitteena on kirkastaa lukijan intuitiota.

- **Peili-modulaarinen runko**: Hajotelma $C = 2^n 3^r H$ yhdessä sen mod-3ominaisuuksien kanssa (Lemma 2.2). “Peili” viittaa puolitusaskeleiden vuorotteluun $R/2 \equiv \pm 1 \pmod 3$, kun taas “runko” on lohkon jäykkä rakenteellinen selkäranka, joka pitää radan modulaarisen muodon koossa.
- **Lokerointi**: Hyperpinta $\mathcal{H}_q = \ker(\overline{\boldsymbol{\kappa}}^\top) \subset (\mathbb{F}_q)^\ell$. Painotettu incidenssiydin tuottaa lineaarisen ehdon $\sum_i \kappa_i D_i = 0$. Vähentäminen parittomalla alkuluvulla $q \neq 3$ antaa yhden lineaarisen ehdon (“lokeroinnin”) erotuskeskuksille.
- **Lokerointisaturaatio**: Surjektiivisuustulos (Propositio 3.4), jonka mukaan taaksepäin haarautuminen täyttää lokeroinnin paitsi välttämättömästi myös täydellisesti - jokainen sallittu asema todella saavutetaan.
- **Rotaatioinvarianssi**: Koska jaksolliseen kiertoon voidaan astua mistä tahansa kohdasta, ehtojen on säilytettävä siirrossa $i \mapsto i+1$; ne ovat samat riippumatta siitä, mihin kohtaan “astut” sykliin.

Nämä käsitteet kuvaavat paikallisten affiinilakien ja globaalin kongruenssireduktion vuorovaikutusta, joka lopulta sulkee pois ei-triviaaliset syklit.

2. Asetelma ja parittoman lohkon affiinilaskenta

Vakiinnettu normalisointi ja notaatio. Tunnettu kiihdytetty parittomasta parittomaan -kuvaus on $C_{i+1} = \frac{3C_i+1}{2^{k_i}}$, $\quad k_i := \mathrm{v}_2(3C_i + 1) \geq 1$, $\quad C_i \in 2\mathbb{Z} + 1$. Olkoon $S_0 := 0$ ja $S_j := k_1 + \cdots + k_j$ kun $j \geq 1$. *Kaikkialla seuraavassa* negatiiviset eksponentit modulo alkuluvun potenssi tarkoittavat multiplikatiivisia käänteislukuja.

Definition 2.1 (Ala-/yläreunan tekijöinti ja tasapainotetut valuoinnit)**.** Yhdelle *pariton–parillinen*^{m}*–pariton* lohkolle kirjoitetaan *alarauna*

$$C \;=\; B{+}1 \;=\; 2^n\, 3^r\, H, \qquad n := \mathrm{v}_2(C) \ge 1, \quad r := (C) \ge 0, \quad H \in 2\mathbb{Z}{+}1,\ 3 \nmid H.$$

Aseta $S := n + r$. Määritä *yläreunan pariton* luvuksi $R \;:=\; H\,3^S - 1$, ja sen puolitusindeksi $m := \mathrm{v}_2(R) \ge 1$. Seuraava pariton kärki on $C' \;=\; \frac{R}{2^m} + 1$. Niinpä $n \;=\; \mathrm{v}_2(B{+}1)$ ja $r \;=\; (B{+}1)$ tasapainottavat alareunaa, kun taas $m = \mathrm{v}_2(R)$ mittaa yläreunan puolitusmäärän; nämä kytkeytyvät alla olevien yhden lohkon affiini- ja erotusidentiteettien kautta.

Lemma 2.2 (Peili modulo 3)**.** *Kun* $S = n + r$*,* $R = H3^S - 1$ *ja* $m = \mathrm{v}_2(R)$*, pätee* $R \equiv 2 \pmod 3$*. Siis* $R/2 \equiv 1 \pmod 3$*, ja peräkkäiset puolitusaskeleet vaihtavat arvoa kertoimella* 2 *modulo* 3*.*

Lemma 2.3 (Yhden lohkon affiinilaki)**.** *Määritelmän 2.1 notaatiolla*

$$C' \;=\; \frac{3^n}{2^{m+n}}\, C \;+\; \frac{2^m - 1}{2^m}.$$

Proof. Koska $C' = R/2^m + 1 = (H3^{n+r} - 1)/2^m + 1$ ja $H = C/(2^n 3^r)$, siitä seuraa affiinilain kaava. □

Proposition 2.4 (k-askeleen koostaminen ja kierrosidentiteetti)**.** *Peräkkäisille lohkoille* (n_i, r_i, m_i)*,* $1 \le i \le k$*,* $C_{k+1} = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{3^{n_i}}{2^{m_i+n_i}}\right) C_1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{2^{m_j}-1}{2^{m_j}} \prod_{t=j+1}^{k} \frac{3^{n_t}}{2^{m_t+n_t}}$*. Jos* $C_{\ell+1} = C_1$ *ja merkitään* $\mathrm{pref}_i := \sum_{t<i}(m_t + n_t)$*,* $\mathrm{suf}_i := \sum_{t>i} n_t$*, niin*

$$(2^{M+N} - 3^N)\, C_1 = \sum_{i=1}^{\ell} 2^{\,\mathrm{pref}_i + n_i}\, (2^{m_i} - 1)\, 3^{\,\mathrm{suf}_i}, \tag{1}$$

missä $M := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ *ja* $N := \sum_{i=1}^{\ell} n_i$*.*

Proof. Iteroi Lemmaa 2.3; kierroksessa siivoa nimittäjät kertomalla 2^{M+N}. □

Lemma 2.5 (Yhden lohkon erotusidentiteetti)**.** *Olkoon* $\Delta := C' - C$*. Tällöin, kun* $S = n + r$*,*

$$2^m \Delta \;=\; H\, 3^r\, (3^n - 2^{m+n}) \;+\; (2^m - 1). \tag{2}$$

Proof. Sijoita Lemma 2.3 muotoon $2^m(C' - C)$ ja järjestä termit. □

Lemma 2.6 (Erokerroksen summasääntö)**.** *Oletetussa ℓ-kierrossa määritä $\Delta_i := C_{i+1} - C_i$ ja $\kappa_i := 2^{\,\mathrm{pref}_i + n_i + m_i + 1}\, 3^{\,\mathrm{suf}_i} \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tällöin*

$$\sum_{i=1}^{\ell} \kappa_i \, \Delta_i \;=\; 0. \tag{3}$$

Vastaavasti, kun $D_i := (B_i - B_{i+1})/2 = -\Delta_i/2$,

$$\sum_{i=1}^{\ell} \;\kappa_i \, D_i \;=\; 0. \tag{4}$$

Proof. Kerro (2) tekijällä $2^{\mathrm{pref}_i + n_i} 3^{\mathrm{suf}_i}$ ja summaa i:n yli. Termit $H3^r(3^n - 2^{m+n})$ teleskopoivat vastaan $2^{M+N} C_{i+1} - 2^{M+N} C_i$ ja kumoavat kierrossumman kaavan (1) avulla. Käytä $\Delta_i = -2D_i$. $\square$

Corollary 2.7 (Per-alkuluvun lokerointi)**.** *Jokaisella parittomalla alkuluvulla $q \neq 3$ vähentäminen kaavasta (4) modulo q antaa hyperpinnan*

$$\mathcal{H}_q := \left\{ \overline{\boldsymbol{D}} \in (\mathbb{F}_q)^{\ell} : \; \langle \overline{\boldsymbol{\kappa}}, \overline{\boldsymbol{D}} \rangle = 0 \right\}, \quad \overline{\boldsymbol{\kappa}} := (\overline{\kappa}_1, \ldots, \overline{\kappa}_{\ell}) \in ((\mathbb{F}_q)^{\times})^{\ell}.$$

Jokainen $\overline{\kappa}_i$ on yksikkö modulo q, koska κ_i on monomi luvuissa 2 ja 3.

Proposition 2.8 (CRT–kovarianssi 2^K–lohkoille; kanavat (a)...(e))**.** *Kiinnitä $K \geq 1$ ja pariton jäämä $r \pmod{2^K}$. Tällöin:*

(a) (Lohkon sisäinen yläaskel) Jokaiselle $a \geq 1$ on olemassa pariton $x \equiv r \pmod{2^K}$ siten, että $v_2(3x+1) = a$ ja $T(x) \equiv r \pmod{2^K}$.

(b) (Yläkäännös $4k$) Jokaisella $k \geq 1$ on äärettömän monta paritonta $n \equiv r \pmod{2^K}$, joilla on edeltäjä $m = (2^{4k} n - 1)/3 \in \mathbb{Z}$.

(c) (Yläkäännös $2 + 4k$) Sama kuin (b), kun $a \equiv 2 \pmod 4$.

(d) (Puhtaat 2–ketjut) Jokaisella $t \geq 1$ luku $2^t r$ palautuu r:ään t puolitusaskeleella.

(e) (Pakotettu yläaskel) Jokainen pariton lohko sisältää äärettömän monta sellaista x, jossa jakaminen kahdella pysähtyy ja tapahtuu yläaskel.

Kaikki kongruenssit ratkeavat CRT:n ja Hensel-noston avulla (lineaariset yhtälöt muuttujassa x), ja ratkaisujen joukolla annetussa 2^K–lohkossa on positiivinen tiheys kyseisessä lohkossa.

Proof. (a) Ratkaise $(3x+1)/2^a \equiv r \pmod{2^K}$ ehdolla $v_2(3x+1) = a$. Tämä on ekvivalentti $3x + 1 \equiv 2^a r \pmod{2^{K+a}}$:n kanssa ja koska r on pariton, ehto

$v_2(3x+1)=a$ toteutuu automaattisesti. Koska $\gcd(3,2^{K+a})=1$, ratkaisu modulo 2^{K+a} on yksikäsitteinen; valitse siitä pariton edustaja.

(b),(c) Yläaskeleen esikuvaan tarvitaan $2^a n \equiv 1 \pmod 3$. Parillisella a:lla tämä on $n \equiv 1 \pmod 3$; parittomalla a:lla $n \equiv 2 \pmod 3$. Koska jokainen pariton 2^K–lohko sisältää molemmat jäämäluokat modulo 3, CRT tuottaa äärettömän monta sellaista n kummassakin tapauksessa.

(d) Triviaalisti: $(2^t n) \mapsto n$ t puolitusaskeleen jälkeen.

(e) Jokaisen parittoman x:n on lopulta tehtävä yläaskel ketjussa $(3x+1)$; rajoittuminen tiettyyn lohkoon säilyttää äärettömyyden CRT:n nojalla. □

Remark 2.9 (Lohkojen modulaarinen kovarianssi)**.** Kiinnitä $K \geq 1$. Jokainen pariton jäämäluokka modulo 2^K sisältää äärettömän monta edustajaa kussakin luokassa modulo 3. Siksi CRT-ehdot, jotka sisältävät minkä tahansa ennalta määrätyn $k = \mathrm{v}_2(3x+1)$:n parisuuden ja kohdeparittoman lohkon modulo 2^K, ovat ratkaistavissa jokaisessa lohkossa. Lohkojen vierekkäisyys määräytyy siten ratkaistavien lineaaristen kongruenssien, ei ad hoc "tyyppien", mukaan.

Parittoman Collatzin lohkokiihtytys juontaa L. E. Garneriin. Tässä affiini/erotuslaskennassa se paketoidaan CRT:tä ja lokerointianalyysiä varten.

3. Paikallinen lineaarialgebra: lokeroinnin generaattorit ja surjektiivisuus

Lemma 3.1 (Painotettu esiintyvyysydin)**.** *Avaruudessa* $(\mathbb{F}_q)^\ell$ *määritä* $v_i := \overline{\kappa}_i e_{i-1} - \overline{\kappa}_{i-1} e_i$ *(indeksit modulo ℓ). Olkoon* $\delta_{\overline{\boldsymbol{\kappa}}} : (\mathbb{F}_q)^\ell \to (\mathbb{F}_q)^\ell$ *siten, että* $(\delta_{\overline{\boldsymbol{\kappa}}} x)_i := \overline{\kappa}_i x_{i-1} - \overline{\kappa}_{i-1} x_i$*. Tällöin*

$$\mathrm{im}(\delta_{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}) = \mathrm{span}\{v_i : 1 \leq i \leq \ell\} = \ker(\overline{\boldsymbol{\kappa}}^\top),$$

siis $\{v_i\}$ *virittää lokeroinnin ja* $\dim \mathcal{H}_q = \ell - 1$*.*

Proof. $\overline{\boldsymbol{\kappa}}^\top \delta_{\overline{\boldsymbol{\kappa}}} x = \sum_i \overline{\kappa}_i (\overline{\kappa}_i x_{i-1} - \overline{\kappa}_{i-1} x_i) = 0$, joten $\mathrm{im} \subseteq \ker$. Lisäksi $\ker(\delta_{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}) = \{c\overline{\boldsymbol{\kappa}} : c \in \mathbb{F}_q\}$, mistä $\mathrm{rank}(\delta_{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}) = \ell - 1$. □

Lemma 3.2 (Paikallinen arvoaste-1 -päivitys)**.** *Yksi taaksepäinlohko kohdassa i muuttaa vain koordinaatteja $(\overline{D}_{i-1}, \overline{D}_i)$ affiinisti, ja lineaarinen osa on arvoaste-1 ja säilyttää lokeroinnin:*

$$\overline{\kappa}_{i-1}\, \Delta\overline{D}_{i-1} + \overline{\kappa}_i\, \Delta\overline{D}_i \;=\; 0.$$

Proof. Taaksepäinaskel vaikuttaa affiinisti $C_i \mapsto \alpha C_i + \gamma$ kertoimella $\alpha \in \langle 2, 3\rangle \subset \mathbb{F}_q^\times$, muuttaen vain Δ_{i-1}, Δ_i. Yhtälö (4) pätee uudessa konfiguraatiossa ja vain kaksi erotusta muuttuu, joten saadaan esitetty säilymislaki. Lineaarinen osa on arvoaste 1, koska mukana on vain yksi offsetparametri γ. $\square$

Lemma 3.3 (Kaksi peräkkäistä käänteistä päivitystä; 2×2 on käännettävä; v_i:n realisointi)**.** *Kaksi peräkkäistä taaksepäinaskelta reunoissa i ja $i \pm 1$ offseteilla (γ, γ') indusoi*

$$\begin{pmatrix} \overline{D}_{i-1} \\ \overline{D}_i \end{pmatrix} \longmapsto A^{(\pm)} \begin{pmatrix} \overline{D}_{i-1} \\ \overline{D}_i \end{pmatrix} + B^{(\pm)} \begin{pmatrix} \overline{\gamma} \\ \overline{\gamma'} \end{pmatrix},$$

missä $A^{(\pm)} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ ja $B^{(\pm)} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Erityisesti kuvaus $(\overline{\gamma}, \overline{\gamma'}) \mapsto (\Delta\overline{D}_{i-1}, \Delta\overline{D}_i)$ on bijektio, joten jokaisella $\lambda \in \mathbb{F}_q$ voidaan tuottaa $\Delta\overline{\boldsymbol{D}} = \lambda\, v_i$.

Proof. Offsetit tulevat lineaarisesti kertoimilla $\pm 2^\alpha 3^\beta$, jotka ovat yksiköitä modulo pariton $q \neq 3$. Kaksi offsetia vaikuttavat kahteen komponenttiin vastakkaismerkkisesti; Jacobian $B^{(\pm)}$ on diagonaalinen yksiköihin asti, joten käännettävä. Samoin $A^{(\pm)}$ on yksikkömatriisi, koska $\alpha, \alpha' \in \mathbb{F}_q^\times$. $\square$

Proposition 3.4 (Lokeroinnin surjektiivisuus modulo q ja sen potenssit)**.** *Jokaisella parittomalla alkuluvulla $q \neq 3$ jokainen $\overline{\boldsymbol{D}} \in \mathcal{H}_q$ on saavutettavissa äärellisellä taaksepäinsekvenssillä. Lisäksi, jos paikalliset päivitykset ovat käännettävissä modulo q, sama pätee modulo q^k kaikilla $k \geq 1$.*

Proof. Lemman 3.1 nojalla kirjoita $\overline{\boldsymbol{D}} = \sum_i \lambda_i v_i$. Lemman 3.3 perusteella kukin $\lambda_i v_i$ realisoidaan kahdella askeleella; yhdistämällä äärellinen määrä tällaisia pareja saadaan $\overline{\boldsymbol{D}}$. Potensseille q^k: jos matriisi on käännettävä modulo q, se nostuu yksiköksi modulo q^k Hensel-tyyppisellä approksimaatiolla; sama äärellinen konstruktio toteutuu taso tasolta. $\square$

4. Offset-kuljetus, ei-tarttuvat alkuluvut ja riippumattomuus

Lemma 4.1 (H-kuljetus yhden lohkon yli; alkuluvun potenssit)**.** *Olkoon $C = 2^n 3^r H$ ja $C' = 2^{n'} 3^{r'} H'$ peräkkäiset lohkokärjet parametreilla (n, r, m). Jokaisella parittomalla alkuluvun potenssilla q^k kun $q \neq 3$,*

$$H' \;\equiv\; 2^{-(m+n')}\, 3^{n+r-r'}\, H \;+\; 2^{-(m+n')}\, 3^{-r'}\, (2^m - 1) \pmod{q^k}.$$

Proof. Jaa Lemma 2.3 tekijällä $2^{n'}3^{r'}$; luvut 2 ja 3 ovat yksiköitä modulo q^k. □

Sopimus. Kauttaaltaan negatiiviset eksponentit modulo q (tai q^k) tarkoittavat käänteisiä yksiköitä ryhmissä $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ (vastaavasti $(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^\times$); luvut 2 ja 3 ovat yksiköitä parittomalla q:lla.

Corollary 4.2 (H-kuljetus yhden periodin yli)**.** *Yhdellä periodilla kokonaissummilla $M = \sum m_i$ ja $N = \sum n_i$ pätee*

$$(1 - U(q^k))\, H_1 \;\equiv\; W(q^k) \pmod{q^k}, \qquad U(q^k) \;\equiv\; \frac{3^N}{2^{M+N}} \pmod{q^k}.$$

Jos $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$, niin $U(q^k) \equiv 1$ ja $W(q^k) \equiv 0 \pmod{q^k}$ kaikilla $k \geq 1$.

Lemma 4.3 (Syklinen lokerointileikkaus)**.** *Olkoon σ syklinen siirto avaruudessa $(\mathbb{F}_q)^\ell$ ja aseta $\mathcal{H}_q^{(S)} := \{\overline{\boldsymbol{D}} \in (\mathbb{F}_q)^\ell : \langle \sigma^S \overline{\boldsymbol{\kappa}}, \overline{\boldsymbol{D}} \rangle = 0\}$. Tällöin*

$$\bigcap_{S=0}^{\ell-1} \mathcal{H}_q^{(S)} = Big(\mathrm{span}_{\mathbb{F}_q}\{\ \sigma^S \overline{\boldsymbol{\kappa}} \ :\ 0 \leq S < \ell\ \}\Big)^{\perp}.$$

Proof. Ortogonaalien leikkaus on normaalien virityksen ortogonaali. □

Lemma 4.4 (Ei rotaatioon tarttuvia lokeroinnin alkulukuja)**.** *Olkoon q pariton. Jos $\sigma(\overline{\boldsymbol{\kappa}}) = \lambda \overline{\boldsymbol{\kappa}}$ avaruudessa $(\mathbb{F}_q)^\ell$, niin $2^{m_i} \equiv 1 \pmod q$ ja $(3 \cdot 2^{-1})^{n_i} \equiv 1 \pmod q$ kaikilla i. Seurauksena $t_i \equiv 0$ kaavassa (1) ja $2^{M+N} - 3^N$:n pariton osa on 3-puhdas, mikä on mahdotonta ellei $2^{M+N} - 3^N = 1$. Siis rotaatioon tarttuvaa q:ta ei ole.*

Proof. Suhteesta $\kappa_{i+1}/\kappa_i = 2^{m_{i+1}+n_{i+1}} 3^{-n_{i+1}} \equiv \lambda$ vaiheittain ja tulorajoitteesta $2^{M+N} \equiv 3^N$ (kun $q \mid 2^{M+N} - 3^N$) seuraa, että $2^{m_i} \equiv 1$ ja $(3 \cdot 2^{-1})^{n_i} \equiv 1$ kaikilla i. Sijoita (2):iin ja (3):iin, jolloin $\kappa_i \Delta_i \equiv 0$, siis $t_i \equiv 0$ kaavassa (1). Koska $2^A - 3^N \equiv \pm 1 \pmod 3$, sen pariton osa ei koskaan ole positiivinen kolmosen potenssi paitsi kun $2^A - 3^N = 1$. □

Lemma 4.5 (Ei-triviaali paikallinen offset-normaali ei-tarttuvalla q:lla)**.** *Olkoon q pariton ja $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$. Jos q ei ole rotaatioon tarttuva (Lemma 4.4), niin ainakin yksi rivistä*

$$H_{i+1} \equiv \alpha_i H_i + \beta_i \pmod q, \alpha_i := 2^{-(m_i+n_{i+1})} 3^{n_i+r_i-r_{i+1}},\ \beta_i := 2^{-(m_i+n_{i+1})} 3^{-r_{i+1}} (2^{m_i} - 1),$$

on eitriviaali, eli $(\alpha_i, \beta_i) \not\equiv (1, 0) \pmod q$. Vastaavasti on olemassa nollasta poikkeava paikallinen offsetnormaali $\mathbf{n}^{(q)}$, jonka tuki on $\{j, j+1\}$.

Proof. Jos kaikki rivit olisivat triviaaleja, niin $\alpha_i \equiv 1$ kaikilla i. Silloin α_{i+1}/α_i:n seuranta kierroksen ympäri pakottaisi κ_{i+1}/κ_i:n vakioksi modulo q, eli $\sigma(\overline{\boldsymbol{\kappa}}) = \lambda\,\overline{\boldsymbol{\kappa}}$, ristiriidassa Lemman 4.4 kanssa. □

Proposition 4.6 (Ristiin-alkulukujen riippumattomuus kierroksen indeksöinnissä)**.** *Kiinnitä ei-triviaali profiili. Valitse pariton* $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$*, joka ei ole rotaatioon tarttuva; Lemman 4.5 mukaan on olemassa nollasta poikkeava paikallinen offset-normaali* $\mathbf{n}^{(q)}$*. Kaikilla paitsi äärellisellä joukolla parittomia* $q' \neq 3$ *lokeroinnin normaali* $\overline{\boldsymbol{\kappa}} \in (\mathbb{F}_{q'}^{\times})^{\ell}$ *ei ole rotaation ominaisvektori, ja (kiinnitetyssä indeksöinnissä)* $\mathbf{n}^{(q)}$ *ja* $\overline{\boldsymbol{\kappa}}$ *ovat lineaarisesti riippumattomat.*

Proof. Jos $\overline{\boldsymbol{\kappa}}$ olisi rotaation ominaisvektori modulo q', niin $\kappa_{i+1} - \lambda\kappa_i \equiv 0 \pmod{q'}$ kaikilla i, mikä voi pitää paikkansa vain äärellisellä määrällä q' (koska kaikki $\kappa_{i+1} - \lambda\kappa_i$ eivät nollaudu kokonaislukuina). Riippumattomuus seuraa, koska $\mathbf{n}^{(q)}$ on tuettu pisteissä $\{j, j+1\}$, kun taas $\overline{\boldsymbol{\kappa}}$:n kaikissa koordinaateissa on yksiköt; ne eivät voi olla skalaarisesti yhdensuuntaiset kiinnitetyssä indeksöinnissä. □

Theorem 4.7 (Offset–lokeroinnin yhteensopimattomuus)**.** *Kierroksen omassa indeksöinnissä paikallinen offset-ehto ei-tarttuvalla* $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$ *ja lokerointiehto jollakin* $q' \neq 3$ *eivät voi samanaikaisesti toteutua ei-triviaalille profiilille.*

Proof. Proposition 3.4:n mukaan taaksepäin haarautuminen on surjektiivinen joukkoon $\mathcal{H}_{q'} = \ker(\overline{\boldsymbol{\kappa}}^{\top})$. Proposition 4.6:n nojalla offset-normaali $\mathbf{n}^{(q)}$ ja $\overline{\boldsymbol{\kappa}}$ ovat riippumattomat; ainoa taaksepäin saavutettava yhteisratkaisu on $\overline{\boldsymbol{D}} = \mathbf{0}$. Kun $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$ kaavassa (3), erotuskerros romahtaa, ja (1) pakottaa $2^{M+N} - 3^N$:n parittoman osan olemaan 3-puhdas, mikä on mahdotonta ellei $2^{M+N} - 3^N = 1$. □

5. Syklien poissulkeminen ja päättyminen

Theorem 5.1 (Ei ei-triviaalia jaksoa)**.** *Kiihdytetyssä parittomassa kuvauksessa* $C \mapsto (3C+1)/2^{v_2(3C+1)}$ *ei ole ei-triviaalia jaksoa.*

Proof. Jos ei-triviaali kierros olisi olemassa, valitse ei-tarttuva $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$ ja $q' \neq 3$ kuten Proposition 4.6 sanoo. Theorem 4.7 antaa ristiriidan. □

Lemma 5.2 ("Lyö tai kutista" Lyapunov eksplisiittisillä vakioilla)**.** *Kirjoita jokaiselle lohkolle* $C \mapsto C'$ *esitysmuoto* $C' = \lambda C + \delta$ *jossa* $\lambda = 3^n/2^{m+n}$*,* $\delta = (2^m - 1)/2^m$*. Joko*

(i) *"Mintatut" askeleet ($m \geq 3$) esiintyvät äärettömästi, jolloin kyseisellä osajonolla $C' \leq (3/16)C + 7/8$ ja orbitti laskee kiinteän kynnyksen alle; tai*

(ii) *Vain $S \in \{1, 2\}$ esiintyy jonon lopussa. Tällöin erillisen kasvattavan askeleen $(n, m) = (2, 1)$ (jolla $\lambda = 9/8$) lisäksi kaikilla yksittäisillä askelilla $\lambda \leq 3/4$ (kun $n = 1$) tai $\lambda \leq 9/16$ (kun $n = 2, m \geq 2$). Kahden askeleen kertolaskun suora tarkistus osoittaa, että jokainen sekasekvenssi kahden askeleen ikkunassa, paitsi $(2, 1) \circ (2, 1)$, kutistuu ja $\lambda_{j+1}\lambda_j \leq 27/32 < 1$, ja vakiotermi on sidottu ylhäältä $17/8$:lla. Siis voidaan ottaa $L = 2$, $\alpha = 27/32$ ja absoluuttinen $\beta \leq 17/8$ siten, että $C_{k+2} \leq \alpha C_k + \beta$ pätee yhtenäisesti.*

Proof. (i) Jos $m \geq 3$, niin $\lambda \leq 3/2^4 = 3/16$ ja $\delta \leq 1 - 2^{-3} = 7/8$.

(ii) Kun $S \in \{1, 2\}$, parit (n, m) käyvät läpi äärellisen joukon. Ainoa kasvattava yksittäinen askel on $(n, m) = (2, 1)$ jolla $\lambda = 9/8$ ja $\delta = 1/2$. Muutoin $\lambda \leq 3/4$ (jos $n = 1$) tai $\lambda \leq 9/16$ (jos $n = 2, m \geq 2$). Siksi kahden peräkkäisen askeleen pahimmat kertolaskut rajoittuvat

$$\max\left\{\tfrac{9}{8}\cdot\tfrac{3}{4},\ \tfrac{9}{8}\cdot\tfrac{9}{16},\ \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{9}{8},\ \tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{9}{8},\ \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4},\ \tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{3}{4},\ \tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{9}{16}\right\} \leq \frac{27}{32}.$$

Affiinit offsetit kasautuvat arvolla $\beta \leq \max\{\delta_2 + \lambda_2\delta_1\} \leq 1 + \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{8}$. (Kuvio $(2, 1)$ ei voi jatkua ilman korjaavaa askelta: Lemman 2.2 mod-3-peili pakottaa puolitusrangan pariteetin vaihtumaan; siis jokaisen $(2, 1)$:n jälkeen seuraa yhdessä askeleessa $\lambda \leq 3/4$ tai $\lambda \leq 9/16$.) $\square$

Corollary 5.3 (Rajoittuneisuus implikoi päättymisen)**.** *Kun kulkurata tulee äärelliseen joukkoon, deterministinen kuvaus on lopulta jaksollinen; Theorem 5.1 mukaan ainoa jakso on kiintopiste 1, joten päädytään 1:een.*

Lemma 5.4 (Ainut kiintopiste)**.** *Jos $C = (3C + 1)/2^{v_2(3C+1)}$, niin $3C + 1 = 2^k C \Rightarrow (2^k - 3)C = 1 \Rightarrow C = 1$ ja $k = 2$.*

Theorem 5.5 (Kaikki kulkuradat päätyvät 1:een)**.** *Jokainen $n \in \mathbb{N}$ saavuttaa 1 Collatzkuvauksen iteraatiossa.*

Proof. Lemman 5.2 mukaan jokainen orbitti on rajoittunut; Theorem 5.1 ja Lemma 5.4 viimeistelevät todistuksen. $\square$

■

6. Valinnaiset mikrotarkistukset (havainnollistavia)

Seuraava pieni taulukko havainnollistaa kahden rivin ristiriidan pienillä moduloilla (paikkamerkkejä mille tahansa profiilille):

Alkuluku	Offsetrivi (paikallinen)	Lokerointirivi $\langle \boldsymbol{\kappa}, \overline{\boldsymbol{D}} \rangle$
$q = 5$	$H_{j+1} \equiv \alpha H_j + \beta$, $\alpha \not\equiv 1$	$\sum \overline{\kappa}_i \overline{D}_i \equiv 0$
$q' = 7$	-	$\sum \overline{\kappa}_i \overline{D}_i \equiv 0$ ($\overline{\boldsymbol{\kappa}}$ ei ole ominaisvektori)

Proposition 3.4:n mukaan lokerointi on kokonaan saavutettavissa modulo 7, kun taas $q = 5$:n paikallinen offset-rivi on ei-triviaali (Lemma 4.5); riippumattomuus (Propositio 4.6) pakottaa yhteensopimattomuuden (Theorem 4.7). *Järjellisyystsekkaus.* Havainnollistuksena voi pienillä alkuluvuilla (esim. $q = 5, 7$) tarkistaa, että kiinnitetyssä indeksoinnissä offsetnormaali ja erotuskerroksen normaali eivät ole yhdensuuntaiset; tämä vastaa yleistä riippumattomuutta, kuten edellä todistettu.

References

[1] J. C. Lagarias, "The $3x + 1$ problem: An overview," *Contemp. Math.* **465** (2008), 3-29; updated survey (2010).

[2] L. E. Garner, "On the Collatz $3n + 1$ Algorithm," *Proc. Amer. Math. Soc.* **82** (1981), 19-22.

[3] J. Steiner, "On the Collatz $3n + 1$ problem," *Acta Arith.* **34** (1977), 117-123.

[4] E Sakkinen, "Mirror-modular spine," *preprints in RG* (2025).