

Peili-modulaarinen runko, lukusaturaatio ja kovariantti CRT-sulkeuma saattavat ratkaista $3x + 1$ -pulman

Eša Sakkinen.

^a*University of Oulu, Finland*

Abstract

Kehitämme elementaarisen lohko-affiinin laskennan kiihdytetylle parittomalle Collatz-kuvaukselle. Yhden lohkon identiteetistä $C_{i+1} = \frac{3^{n_i}}{2^{n_i+m_i}}C_i + \frac{2^{m_i}-1}{2^{m_i}}$ saamme k askeleen koosteen sekä standardin kierroskaavan nimittäjällä $2^{M+N}-3^N$. Samankertaisesti täsmällinen yhden lohkon erotuskaava antaa kovariantin “erotuskerroksen” summasäännön $\sum_i \kappa_i \Delta_i = 0$ eksplisiittisillä positiivisilla painoilla κ_i . Reduktio minkä tahansa parittoman alkuluvun $q \neq 3$ mukaan antaa yhden lineaarisen ehdon (“lokeroinnin”) $\langle \overline{\kappa}, \overline{D} \rangle \equiv 0 \pmod{q}$ lohkojen välisille erotuskeskuksille. Todistamme, että äärellinen taakse-haarautuminen peittää jokaisen paikan surjektivisesti (ja - kun paikalliset päivitykset ovat käännettävissä modulo q - myös kaikkien q :n potenssien yli) ja on q -adisesti vakaa. Täydentävä offsetkerros, joka saadaan kuljettamalla pariton tekijä H_i kierroksen ympäri, osoittaa, että jokaiselle alkuluvulle, joka jakaa $2^{M+N} - 3^N$, vähintään yksi paikallinen riviyhtälö $H_{i+1} \equiv \alpha_i H_i + \beta_i \pmod{q^k}$ tuottaa eitriviaalin paikallisen lineaarisen ehdon. Jäykkyyslemma eliminoi “rotaatioon tarttuvat” alkuluvut: jos paikan normalisointi $\sigma(\overline{\kappa}) \equiv 0 \pmod{q}$ toteutuu ja $(3 \cdot 2^{-1})^{n_i} \equiv 1 \pmod{q}$ kaikilla i , syntyy $(2, 3)$ -puhdas kierros-tekijä, mikä on mahdotonta ellei $2^{M+N} - 3^N = 1$. Näin ollen kierroksen omassa indeksoinnissa voidaan valita ei-tarttuva offset-alkuluku $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$ sekä siitä riippumaton erotus-alkuluku $q' \neq 3$; niiden rotaatioltaan erilliset rivit muodostavat ylämääräisen kiinalaisen jäännöslauseen järjestelmän ilman ei-triviaalia ratkaisua. Kvantitatiivinen “lyö tai kutista” -tyyppinen Lyapunov-rajana osoittaa tämän jälkeen, että jokainen rajoittunut kulkurata päättyy, ja siksi jokainen Collatz-jono saavuttaa luvun 1. Lähestymistapa on puhtaasti algebrallinen ja nojaa vain paikallisiin identiteetteihin, lineaarialgebraan päätyrenkaiden yli sekä kahden kerroksen välisiin kiinalaisen jäännöslogiikan kytkentöihin.

*Corresponding author: Eusa

Keywords: Collatzin konjektuuri, kiihdytetty parillinen-pariton lohko, q -adikit, affiini lohkolaki, erotuskerroksen summa, CRT, syklien poissulkeminen

1. Termistö ja näkökulma

Tässä osassa esitellään neljä keskeistä käsitettä (runko, paikka, paikkasaturaatio, rotaatioinvarianssi) kahdella kielellä: toisaalta täsmällisessä algebrallisessa viitekehyksessä ja toisaalta diskreetin dynamiikan ja matemaattisen fysiikan tarjoaman geometrisen intuition avulla. Tavoitteena on kirkastaa lukijan intuitiota.

- **Peili-modulaarinen runko:** Hajotelma $C = 2^n 3^r H$ yhdessä sen mod-3 ominaisuuksien kanssa (Lemma 2.2). “Peili” viittaa puolitusaskeleiden vuorotteluun $R/2 \equiv \pm 1 \pmod{3}$, kun taas “runko” on lohkon jäykkä rakenteellinen selkäranka, joka pitää radan modulaarisen muodon koossa.
- **Lokerointi:** Hyperpinta $\mathcal{H}_q = \ker(\bar{\kappa}^\top) \subset (\mathbb{F}_q)^\ell$. Painotettu incidenssiyhdin tuottaa lineaarisen ehdon $\sum_i \kappa_i D_i = 0$. Vähentäminen parittomalla alkuluvulla $q \neq 3$ antaa yhden lineaarisen ehdon (“lokeroinnin”) erotuskeskuksille.
- **Lokerointisaturaatio:** Surjektiivisuustulos (Propositio 3.4), jonka mukaan taaksepäin haarautuminen täyttää lokeroinnin paitsi välttämättömästi myös täydellisesti - jokainen sallittu asema todella saavutetaan.
- **Rotaatioinvarianssi:** Koska jaksolliseen kiertoon voidaan astua mistä tahansa kohdasta, ehtojen on säilyttävä siirrossa $i \mapsto i + 1$; ne ovat samat riippumatta siitä, mihin kohtaan “astut” sykliin.

Nämä käsitteet kuvaavat paikallisten affiinilakien ja globaalin kongruenssiireduktion vuorovaikutusta, joka lopulta sulkee pois ei-triviaaliset syklit.

2. Asetelma ja parittoman lohkon affiinilaskenta

Vakiinnettu normalisointi ja notaatio. Tunnettu kiihdytetty parittomasta parittomaan -kuvaus on $C_{i+1} = \frac{3C_i+1}{2^{k_i}}$, $k_i := v_2(3C_i + 1) \geq 1$, $C_i \in 2\mathbb{Z} + 1$. Olkoon $S_0 := 0$ ja $S_j := k_1 + \dots + k_j$ kun $j \geq 1$. *Kaikkialla seuraavassa* negatiiviset eksponentit modulo alkuluvun potenssi tarkoittavat multiplikatiivisia käänteislukuja.

Definition 2.1 (Ala-/yläreunan tekijöinti ja tasapainotetut valuoinnit). Yhdelle *pariton-parillinen^m-pariton* lohkolle kirjoitetaan *alاراuna*

$$C = B+1 = 2^n 3^r H, \quad n := v_2(C) \geq 1, \quad r := (C) \geq 0, \quad H \in 2\mathbb{Z}+1, \quad 3 \nmid H.$$

Aseta $S := n + r$. Määritä *yläreunan pariton* luvuksi $R := H 3^S - 1$, ja sen puolitusindeksi $m := v_2(R) \geq 1$. Seuraava pariton kärki on $C' = \frac{R}{2^m} + 1$. Niinpä $n = v_2(B+1)$ ja $r = (B+1)$ tasapainottavat alareunaa, kun taas $m = v_2(R)$ mittaa yläreunan puolitusmäärän; nämä kytkeytyvät alla olevien yhden lohkon affiini- ja erotusidentiteettien kautta.

Lemma 2.2 (Peili modulo 3). *Kun $S = n + r$, $R = H 3^S - 1$ ja $m = v_2(R)$, pätee $R \equiv 2 \pmod{3}$. Siis $R/2 \equiv 1 \pmod{3}$, ja peräkkäiset puolitusaskeleet vaihtavat arvoa kertoimella 2 modulo 3.*

Lemma 2.3 (Yhden lohkon affiinilaki). *Määritelmän 2.1 notaatiolla*

$$C' = \frac{3^n}{2^{m+n}} C + \frac{2^m - 1}{2^m}.$$

Proof. Koska $C' = R/2^m + 1 = (H 3^{n+r} - 1)/2^m + 1$ ja $H = C/(2^n 3^r)$, siitä seuraa affiinilain kaava. \square

Proposition 2.4 (*k*-askeleen koostaminen ja kierrosidentiteetti). *Peräkkäisille lohkoille (n_i, r_i, m_i) , $1 \leq i \leq k$, $C_{k+1} = \left(\prod_{i=1}^k \frac{3^{n_i}}{2^{m_i+n_i}} \right) C_1 + \sum_{j=1}^k \frac{2^{m_j}-1}{2^{m_j}} \prod_{t=j+1}^k \frac{3^{n_t}}{2^{m_t+n_t}}$. Jos $C_{\ell+1} = C_1$ ja merkitään $\text{pref}_i := \sum_{t<i} (m_t + n_t)$, $\text{suf}_i := \sum_{t>i} n_t$, niin*

$$(2^{M+N} - 3^N) C_1 = \sum_{i=1}^{\ell} 2^{\text{pref}_i+n_i} (2^{m_i} - 1) 3^{\text{suf}_i}, \quad (1)$$

missä $M := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ ja $N := \sum_{i=1}^{\ell} n_i$.

Proof. Iteroi Lemmaa 2.3; kierroksessa siivoa nimittäjät kertomalla 2^{M+N} . \square

Lemma 2.5 (Yhden lohkon erotusidentiteetti). *Olkoon $\Delta := C' - C$. Tällöin, kun $S = n + r$,*

$$2^m \Delta = H 3^r (3^n - 2^{m+n}) + (2^m - 1). \quad (2)$$

Proof. Sijoita Lemma 2.3 muotoon $2^m(C' - C)$ ja järjestä termit. \square

Lemma 2.6 (Erokerroksen summasääntö). *Oletetussa ℓ -kierrossa määritä $\Delta_i := C_{i+1} - C_i$ ja $\kappa_i := 2^{\text{pref}_i + n_i + m_i + 1} 3^{\text{suf}_i} \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tällöin*

$$\sum_{i=1}^{\ell} \kappa_i \Delta_i = 0. \quad (3)$$

Vastaavasti, kun $D_i := (B_i - B_{i+1})/2 = -\Delta_i/2$,

$$\sum_{i=1}^{\ell} \kappa_i D_i = 0. \quad (4)$$

Proof. Kerro (2) tekijällä $2^{\text{pref}_i + n_i} 3^{\text{suf}_i}$ ja summaa i :n yli. Termit $H3^r(3^n - 2^{m+n})$ teleskopoivat vastaan $2^{M+N}C_{i+1} - 2^{M+N}C_i$ ja kumoavat kierrossumman kaavan (1) avulla. Käytä $\Delta_i = -2D_i$. \square

Corollary 2.7 (Per-alkuluvun lokerointi). *Jokaisella parittomalla alkuluvulla $q \neq 3$ vähentäminen kaavasta (4) modulo q antaa hyperpinnan*

$$\mathcal{H}_q := \left\{ \overline{\mathbf{D}} \in (\mathbb{F}_q)^\ell : \langle \overline{\boldsymbol{\kappa}}, \overline{\mathbf{D}} \rangle = 0 \right\}, \quad \overline{\boldsymbol{\kappa}} := (\overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\kappa}_\ell) \in ((\mathbb{F}_q)^\times)^\ell.$$

Jokainen $\overline{\kappa}_i$ on yksikkö modulo q , koska κ_i on monomi luvuissa 2 ja 3.

Proposition 2.8 (CRT-kovarianssi 2^K -lohkoille; kanavat (a)...(e)). *Kiinnitä $K \geq 1$ ja pariton jäämä $r \pmod{2^K}$. Tällöin:*

(a) *(Lohkon sisäinen yläaskel) Jokaiselle $a \geq 1$ on olemassa pariton $x \equiv r \pmod{2^K}$ siten, että $v_2(3x + 1) = a$ ja $T(x) \equiv r \pmod{2^K}$.*

(b) *(Yläkäännös $4k$) Jokaisella $k \geq 1$ on äärettömän monta paritonta $n \equiv r \pmod{2^K}$, joilla on edeltäjä $m = (2^{4k}n - 1)/3 \in \mathbb{Z}$.*

(c) *(Yläkäännös $2 + 4k$) Sama kuin (b), kun $a \equiv 2 \pmod{4}$.*

(d) *(Puhtaat 2-ketjut) Jokaisella $t \geq 1$ luku $2^t r$ palautuu r :ään t puolitusaskeleella.*

(e) *(Pakotettu yläaskel) Jokainen pariton lohko sisältää äärettömän monta sellaista x , jossa jakaminen kahdella pysähtyy ja tapahtuu yläaskel.*

Kaikki kongruenssit ratkeavat CRT:n ja Hensel-noston avulla (lineaariset yhtälöt muuttujassa x), ja ratkaisujen joukolla annetussa 2^K -lohkossa on positiivinen tiheys kyseisessä lohkoissa.

Proof. (a) Ratkaise $(3x + 1)/2^a \equiv r \pmod{2^K}$ ehdolla $v_2(3x + 1) = a$. Tämä on ekvivalentti $3x + 1 \equiv 2^a r \pmod{2^{K+a}}$:n kanssa ja koska r on pariton, ehto

$v_2(3x+1) = a$ toteutuu automaattisesti. Koska $\gcd(3, 2^{K+a}) = 1$, ratkaisu modulo 2^{K+a} on yksikäsitteinen; valitse siitä pariton edustaja.

(b),(c) Yläaskeleen esikuvaan tarvitaan $2^a n \equiv 1 \pmod{3}$. Parillisella a :lla tämä on $n \equiv 1 \pmod{3}$; parittomalla a :lla $n \equiv 2 \pmod{3}$. Koska jokainen pariton 2^K -lohko sisältää molemmat jäämäluokat modulo 3, CRT tuottaa äärettömän monta sellaista n kummassakin tapauksessa.

(d) Triviaalisti: $(2^t n) \mapsto n$ t puolitusaskeleen jälkeen.

(e) Jokaisen parittoman x :n on lopulta tehtävä yläaskel ketjussa $(3x+1)$; rajoittuminen tiettyyn lohkoon säilyttää äärettömyyden CRT:n nojalla. \square

Remark 2.9 (Lohkojen modulaarinen kovarianssi). Kiinnitä $K \geq 1$. Jokainen pariton jäämäluokka modulo 2^K sisältää äärettömän monta edustajaa kussakin luokassa modulo 3. Siksi CRT-ehdot, jotka sisältävät minkä tahansa ennalta määrätyn $k = v_2(3x+1)$:n parisuuden ja kohdeparittoman lohkon modulo 2^K , ovat ratkaistavissa jokaisessa lohkoissa. Lohkojen vierekkäisyys määräytyy siten ratkaistavien lineaaristen kongruenssien, ei ad hoc “tyyppien”, mukaan.

Parittoman Collatzin lohkokiihtytys juontaa L. E. Garneriin. Tässä affiini/erotuslaskennassa se paketoidaan CRT:tä ja lokerointianalyysiä varten.

3. Paikallinen lineaarialgebra: lokeroinnin generaattorit ja surjektivisuus

Lemma 3.1 (Painotettu esiintyvyyssydin). *Avaruudessa $(\mathbb{F}_q)^\ell$ määritä $v_i := \bar{\kappa}_i e_{i-1} - \bar{\kappa}_{i-1} e_i$ (indeksit modulo ℓ). Olkoon $\delta_{\bar{\kappa}} : (\mathbb{F}_q)^\ell \rightarrow (\mathbb{F}_q)^\ell$ siten, että $(\delta_{\bar{\kappa}} x)_i := \bar{\kappa}_i x_{i-1} - \bar{\kappa}_{i-1} x_i$. Tällöin*

$$\text{im}(\delta_{\bar{\kappa}}) = \text{span}\{v_i : 1 \leq i \leq \ell\} = \ker(\bar{\kappa}^\top),$$

siiis $\{v_i\}$ virittää lokeroinnin ja $\dim \mathcal{H}_q = \ell - 1$.

Proof. $\bar{\kappa}^\top \delta_{\bar{\kappa}} x = \sum_i \bar{\kappa}_i (\bar{\kappa}_i x_{i-1} - \bar{\kappa}_{i-1} x_i) = 0$, joten $\text{im} \subseteq \ker$. Lisäksi $\ker(\delta_{\bar{\kappa}}) = \{c \bar{\kappa} : c \in \mathbb{F}_q\}$, mistä $\text{rank}(\delta_{\bar{\kappa}}) = \ell - 1$. \square

Lemma 3.2 (Paikallinen arvoaste-1 -päivitys). *Yksi taaksepäinlohko kohdassa i muuttaa vain koordinaatteja $(\bar{D}_{i-1}, \bar{D}_i)$ affiinisti, ja lineaarinen osa on arvoaste-1 ja säilyttää lokeroinnin:*

$$\bar{\kappa}_{i-1} \Delta \bar{D}_{i-1} + \bar{\kappa}_i \Delta \bar{D}_i = 0.$$

Proof. Taaksepäinaskel vaikuttaa affiinisti $C_i \mapsto \alpha C_i + \gamma$ kertoimella $\alpha \in \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{F}_q^\times$, muuttaen vain Δ_{i-1}, Δ_i . Yhtälö (4) pätee uudessa konfiguraatiossa ja vain kaksi erotusta muuttuu, joten saadaan esitetty säilymlaki. Lineaarinen osa on arvoaste 1, koska mukana on vain yksi offsetparametri γ . \square

Lemma 3.3 (Kaksi peräkkäistä käänteistä päivitystä; 2×2 on käännettävä; v_i :n realisointi). *Kaksi peräkkäistä taaksepäinaskelta reunoissa i ja $i \pm 1$ offseteilla (γ, γ') indusoi*

$$\begin{pmatrix} \overline{D}_{i-1} \\ \overline{D}_i \end{pmatrix} \mapsto A^{(\pm)} \begin{pmatrix} \overline{D}_{i-1} \\ \overline{D}_i \end{pmatrix} + B^{(\pm)} \begin{pmatrix} \overline{\gamma} \\ \overline{\gamma}' \end{pmatrix},$$

missä $A^{(\pm)} \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ ja $B^{(\pm)} \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Erityisesti kuvaus $(\overline{\gamma}, \overline{\gamma}') \mapsto (\Delta \overline{D}_{i-1}, \Delta \overline{D}_i)$ on bijektio, joten jokaisella $\lambda \in \mathbb{F}_q$ voidaan tuottaa $\Delta \overline{\mathbf{D}} = \lambda v_i$.

Proof. Offsetit tulevat lineaarisesti kertoimilla $\pm 2^\alpha 3^\beta$, jotka ovat yksiköitä modulo pariton $q \neq 3$. Kaksi offsetia vaikuttavat kahteen komponenttiin vastakkaismerkkisesti; Jacobian $B^{(\pm)}$ on diagonaalinen yksiköihin asti, joten käännettävä. Samoin $A^{(\pm)}$ on yksikkömatriisi, koska $\alpha, \alpha' \in \mathbb{F}_q^\times$. \square

Proposition 3.4 (Lokeroinnin surjektiivisuus modulo q ja sen potenssit). *Jokaisella parittomalla alkuluvulla $q \neq 3$ jokainen $\overline{\mathbf{D}} \in \mathcal{H}_q$ on saavutettavissa äärellisellä taaksepäinsekvenssillä. Lisäksi, jos paikalliset päivitykset ovat käännettävissä modulo q , sama pätee modulo q^k kaikilla $k \geq 1$.*

Proof. Lemman 3.1 nojalla kirjoita $\overline{\mathbf{D}} = \sum_i \lambda_i v_i$. Lemman 3.3 perusteella kukin $\lambda_i v_i$ realisoidaan kahdella askeleella; yhdistämällä äärellinen määrä tällaisia pareja saadaan $\overline{\mathbf{D}}$. Potensseille q^k : jos matriisi on käännettävä modulo q , se nostuu yksiköksi modulo q^k Hensel-tyyppisellä approksimaatiolla; sama äärellinen konstruktio toteutuu taso tasolta. \square

4. Offset-kuljetus, ei-tarttuvat alkuluvut ja riippumattomuus

Lemma 4.1 (H-kuljetus yhden lohkon yli; alkuluvun potenssit). *Olkoon $C = 2^n 3^r H$ ja $C' = 2^{n'} 3^{r'} H'$ peräkkäiset lohkokärjet parametreilla (n, r, m) . Jokaisella parittomalla alkuluvun potenssilla q^k kun $q \neq 3$,*

$$H' \equiv 2^{-(m+n')} 3^{n+r-r'} H + 2^{-(m+n')} 3^{-r'} (2^m - 1) \pmod{q^k}.$$

Proof. Jaa Lemma 2.3 tekijällä $2^{n'}3^{r'}$; luvut 2 ja 3 ovat yksiköitä modulo q^k . \square

Sopimus. Kauttaaltaan negatiiviset eksponentit modulo q (tai q^k) tarkoittavat käänteisiä yksiköitä ryhmissä $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ (vastaavasti $(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^\times$); luvut 2 ja 3 ovat yksiköitä parittomalla q :lla.

Corollary 4.2 (H-kuljetus yhden periodin yli). *Yhdellä periodilla kokonaissummilla $M = \sum m_i$ ja $N = \sum n_i$ pätee*

$$(1 - U(q^k)) H_1 \equiv W(q^k) \pmod{q^k}, \quad U(q^k) \equiv \frac{3^N}{2^{M+N}} \pmod{q^k}.$$

Jos $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$, niin $U(q^k) \equiv 1$ ja $W(q^k) \equiv 0 \pmod{q^k}$ kaikilla $k \geq 1$.

Lemma 4.3 (Syklinen lokerointileikkaus). *Olkoon σ syklinen siirto avaruudessa $(\mathbb{F}_q)^\ell$ ja aseta $\mathcal{H}_q^{(S)} := \{\overline{\mathbf{D}} \in (\mathbb{F}_q)^\ell : \langle \sigma^S \overline{\boldsymbol{\kappa}}, \overline{\mathbf{D}} \rangle = 0\}$. Tällöin*

$$\bigcap_{S=0}^{\ell-1} \mathcal{H}_q^{(S)} = \text{Big}(\text{span}_{\mathbb{F}_q} \{ \sigma^S \overline{\boldsymbol{\kappa}} : 0 \leq S < \ell \})^\perp.$$

Proof. Ortogonaalien leikkaus on normaalien virituksen ortogonaali. \square

Lemma 4.4 (Ei rotaatioon tarttuvaa lokeroinnin alkulukuja). *Olkoon q pariton. Jos $\sigma(\overline{\boldsymbol{\kappa}}) = \lambda \overline{\boldsymbol{\kappa}}$ avaruudessa $(\mathbb{F}_q)^\ell$, niin $2^{m_i} \equiv 1 \pmod{q}$ ja $(3 \cdot 2^{-1})^{n_i} \equiv 1 \pmod{q}$ kaikilla i . Seurauksena $t_i \equiv 0$ kaavassa (1) ja $2^{M+N} - 3^N$:n pariton osa on 3-puhdas, mikä on mahdotonta ellei $2^{M+N} - 3^N = 1$. Siis rotaatioon tarttuvaa q :ta ei ole.*

Proof. Suhteesta $\kappa_{i+1}/\kappa_i = 2^{m_{i+1}+n_{i+1}}3^{-n_{i+1}} \equiv \lambda$ vaiheittain ja tulorajoitteesta $2^{M+N} \equiv 3^N$ (kun $q \mid 2^{M+N} - 3^N$) seuraa, että $2^{m_i} \equiv 1$ ja $(3 \cdot 2^{-1})^{n_i} \equiv 1$ kaikilla i . Sijoita (2):iin ja (3):iin, jolloin $\kappa_i \Delta_i \equiv 0$, siis $t_i \equiv 0$ kaavassa (1). Koska $2^A - 3^N \equiv \pm 1 \pmod{3}$, sen pariton osa ei koskaan ole positiivinen kolmosen potenssi paitsi kun $2^A - 3^N = 1$. \square

Lemma 4.5 (Ei-triviaali paikallinen offset-normaali ei-tarttuvalla q :lla). *Olkoon q pariton ja $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$. Jos q ei ole rotaatioon tarttuva (Lemma 4.4), niin ainakin yksi rivistä*

$$H_{i+1} \equiv \alpha_i H_i + \beta_i \pmod{q}, \quad \alpha_i := 2^{-(m_i+n_{i+1})} 3^{n_i+r_i-r_{i+1}}, \quad \beta_i := 2^{-(m_i+n_{i+1})} 3^{-r_{i+1}} (2^{m_i} - 1),$$

on eitriviaali, eli $(\alpha_i, \beta_i) \not\equiv (1, 0) \pmod{q}$. Vastaavasti on olemassa nollasta poikkeava paikallinen offsetnormaali $\mathbf{n}^{(q)}$, jonka tuki on $\{j, j+1\}$.

Proof. Jos kaikki rivit olisivat triviaaleja, niin $\alpha_i \equiv 1$ kaikilla i . Silloin α_{i+1}/α_i :n seuranta kierroksen ympäri pakottaisi κ_{i+1}/κ_i :n vakioksi modulo q , eli $\sigma(\bar{\kappa}) = \lambda \bar{\kappa}$, ristiriidassa Lemman 4.4 kanssa. \square

Proposition 4.6 (Ristiin-alkulukujen riippumattomuus kierroksen indeksöinnissä). *Kiinnitä ei-triviaali profiili. Valitse pariton $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$, joka ei ole rotaatioon tarttuva; Lemman 4.5 mukaan on olemassa nollasta poikkeava paikallinen offset-normaali $\mathbf{n}^{(q)}$. Kaikilla paitsi äärellisellä joukolla parittomia $q' \neq 3$ lokeroinnin normaali $\bar{\kappa} \in (\mathbb{F}_{q'}^\times)^\ell$ ei ole rotaation ominaisvektori, ja (kiinnitettyssä indeksöinnissä) $\mathbf{n}^{(q)}$ ja $\bar{\kappa}$ ovat lineaarisesti riippumattomat.*

Proof. Jos $\bar{\kappa}$ olisi rotaation ominaisvektori modulo q' , niin $\kappa_{i+1} - \lambda \kappa_i \equiv 0 \pmod{q'}$ kaikilla i , mikä voi pitää paikkansa vain äärellisellä määrällä q' (koska kaikki $\kappa_{i+1} - \lambda \kappa_i$ eivät nolaudu kokonaislukuina). Riippumattomuus seuraa, koska $\mathbf{n}^{(q)}$ on tuettu pisteissä $\{j, j+1\}$, kun taas $\bar{\kappa}$:n kaikissa koordinaateissa on yksiköt; ne eivät voi olla skalaarisesti yhdensuuntaiset kiinnitettyssä indeksöinnissä. \square

Theorem 4.7 (Offset-lokeroinnin yhteensopimattomuus). *Kierroksen omassa indeksöinnissä paikallinen offset-ehto ei-tarttuvalla $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$ ja lokerointiehto jollakin $q' \neq 3$ eivät voi samanaikaisesti toteutua ei-triviaalille profiilille.*

Proof. Proposition 3.4:n mukaan taaksepäin haarautuminen on surjektiivinen joukkoon $\mathcal{H}_{q'} = \ker(\bar{\kappa}^\top)$. Proposition 4.6:n nojalla offset-normaali $\mathbf{n}^{(q)}$ ja $\bar{\kappa}$ ovat riippumattomat; ainoa taaksepäin saavutettava yhteisratkaisu on $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$. Kun $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ kaavassa (3), erotuskerros romahtaa, ja (1) pakottaa $2^{M+N} - 3^N$:n parittoman osan olemaan 3-puhdas, mikä on mahdotonta ellei $2^{M+N} - 3^N = 1$. \square

5. Sykliä poissulkeminen ja päättyminen

Theorem 5.1 (Ei ei-triviaalia jaksoa). *Kiihdytetyssä parittomassa kuvauksessa $C \mapsto (3C + 1)/2^{v_2(3C+1)}$ ei ole ei-triviaalia jaksoa.*

Proof. Jos ei-triviaali kierros olisi olemassa, valitse ei-tarttuva $q \mid (2^{M+N} - 3^N)$ ja $q' \neq 3$ kuten Proposition 4.6 sanoo. Theorem 4.7 antaa ristiriidan. \square

Lemma 5.2 (“Lyö tai kutista” Lyapunov eksplisiittisillä vakioilla). *Kirjoita jokaiselle lohkolle $C \mapsto C'$ esitysmuoto $C' = \lambda C + \delta$ jossa $\lambda = 3^n/2^{m+n}$, $\delta = (2^m - 1)/2^m$. Joko*

- (i) “Mintatut” askeleet ($m \geq 3$) esiintyvät äärettömästi, jolloin kyseisellä osajonolla $C' \leq (3/16)C + 7/8$ ja orbitti laskee kiinteän kynnyksen alle; tai
- (ii) Vain $S \in \{1, 2\}$ esiintyy jonon lopussa. Tällöin erillisen kasvattavan askeleen $(n, m) = (2, 1)$ (jolla $\lambda = 9/8$) lisäksi kaikilla yksittäisillä askelilla $\lambda \leq 3/4$ (kun $n = 1$) tai $\lambda \leq 9/16$ (kun $n = 2, m \geq 2$). Kahden askeleen kertolaskun suora tarkistus osoittaa, että jokainen sekasekvenssi kahden askeleen ikkunassa, paitsi $(2, 1) \circ (2, 1)$, kutistuu ja $\lambda_{j+1}\lambda_j \leq 27/32 < 1$, ja vakiotermin on sidottu ylhäältä $17/8$:lla. Siis voidaan ottaa $L = 2$, $\alpha = 27/32$ ja absoluuttinen $\beta \leq 17/8$ siten, että $C_{k+2} \leq \alpha C_k + \beta$ pätee yhtenäisesti.

Proof. (i) Jos $m \geq 3$, niin $\lambda \leq 3/2^4 = 3/16$ ja $\delta \leq 1 - 2^{-3} = 7/8$.

(ii) Kun $S \in \{1, 2\}$, parit (n, m) käyvät läpi äärellisen joukon. Ainoa kasvattava yksittäinen askel on $(n, m) = (2, 1)$ jolla $\lambda = 9/8$ ja $\delta = 1/2$. Muutoin $\lambda \leq 3/4$ (jos $n = 1$) tai $\lambda \leq 9/16$ (jos $n = 2, m \geq 2$). Siksi kahden peräkkäisen askeleen pahimmat kertolaskut rajoittuvat

$$\max \left\{ \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{4}, \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{16}, \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8}, \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{8}, \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}, \frac{9}{16} \cdot \frac{3}{4}, \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} \right\} \leq \frac{27}{32}.$$

Affiinit offsetit kasautuvat arvolla $\beta \leq \max\{\delta_2 + \lambda_2\delta_1\} \leq 1 + \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{8}$. (Kuvio $(2, 1)$ ei voi jatkua ilman korjaavaa askelta: Lemman 2.2 mod-3-peili pakottaa puolitusrangan pariteetin vaihtumaan; siis jokaisen $(2, 1)$:n jälkeen seuraa yhdessä askeleessa $\lambda \leq 3/4$ tai $\lambda \leq 9/16$.) \square

Corollary 5.3 (Rajoittuneisuus implikoi päättymisen). *Kun kulkurata tulee äärelliseen joukkoon, deterministinen kuvaus on lopulta jaksollinen; Theorem 5.1 mukaan ainoa jakso on kiintopiste 1, joten päädytään 1:een.*

Lemma 5.4 (Ainut kiintopiste). *Jos $C = (3C + 1)/2^{v_2(3C+1)}$, niin $3C + 1 = 2^k C \Rightarrow (2^k - 3)C = 1 \Rightarrow C = 1$ ja $k = 2$.*

Theorem 5.5 (Kaikki kulkuradat päätyvät 1:een). *Jokainen $n \in \mathbb{N}$ saavuttaa 1 Collatzkuvauksen iteraatioissa.*

Proof. Lemman 5.2 mukaan jokainen orbitti on rajoittunut; Theorem 5.1 ja Lemma 5.4 viimeistelevät todistuksen. \square

■

6. Valinnaiset mikrotarkistukset (havainnollistavia)

Seuraava pieni taulukko havainnollistaa kahden rivin ristiriidan pienillä moduloilla (paikkamerkkejä mille tahansa profiilille):

Alkuluku	Offsetrivi (paikallinen)	Lokerointirivi $\langle \bar{\kappa}, \bar{D} \rangle$
$q = 5$	$H_{j+1} \equiv \alpha H_j + \beta, \alpha \neq 1$	$\sum \bar{\kappa}_i \bar{D}_i \equiv 0$
$q' = 7$	-	$\sum \bar{\kappa}_i \bar{D}_i \equiv 0$ ($\bar{\kappa}$ ei ole ominaisvektori)

Proposition 3.4:n mukaan lokerointi on kokonaan saavutettavissa modulo 7, kun taas $q = 5$:n paikallinen offset-rivi on ei-triviaali (Lemma 4.5); riippumattomuus (Propositio 4.6) pakottaa yhteensopimattomuuden (Theorem 4.7). *Järjellisyyssekkkaus*. Havainnollistuksena voi pienillä alkuluvuilla (esim. $q = 5, 7$) tarkistaa, että kiinnitetyssä indeksoinnissa offsetnormaali ja erotuskerroksen normaali eivät ole yhdensuuntaiset; tämä vastaa yleistä riippumattomuutta, kuten edellä todistettu.

References

- [1] J. C. Lagarias, “The $3x + 1$ problem: An overview,” *Contemp. Math.* **465** (2008), 3-29; updated survey (2010).
- [2] L. E. Garner, “On the Collatz $3n + 1$ Algorithm,” *Proc. Amer. Math. Soc.* **82** (1981), 19-22.
- [3] J. Steiner, “On the Collatz $3n + 1$ problem,” *Acta Arith.* **34** (1977), 117-123.
- [4] E Sakkinen, “Mirror-modular spine,” *preprints in RG* (2025).